M1 Maxwellsches Rad

Stoffgebiet: Translations- und Rotationsbewegung, Massenträgheitsmoment, physikalisches Pendel.

Versuchsziel: Es ist das Massenträgheitsmoment eines Maxwellschen Rades auf zwei Arten zu bestimmen.

Literatur: Vorlesungsmanuskript, Lehrbücher der Physik, z. B.
Hering, Martin, Stohrer Physik für Ingenieure
Lindner, Physik für Ingenieure

1. Grundlagen

1.1 Maxwellsches Rad

Das in Abb. 1 dargestellte Maxwellsche Rad ist mit seiner horizontalen Achse vom Radius **r** an zwei vertikalen Fäden so aufgehängt, dass diese sich bei Drehung des Rades auf der Achse auf- oder abwickeln. Bringt man das Rad durch Aufwickeln der Fäden in die höchste Lage und lässt es dort los, so bewegt es sich unter dem Einfluss der Schwerkraft mit konstanter Beschleunigung nach unten. Seine Bewegung setzt sich dabei in einfacher Weise aus einer Translations- und einer Rotationsbewegung um seine Schwerpunktsachse zusammen. Aus der Messung der Translationsbeschleunigung kann man das Massenträgheitsmoment - kurz Trägheitsmoment - bezüglich der Drehachse berechnen.
Ein anderes Verfahren um das Trägheitsmoment des Maxwellrades zu bestimmen ist,

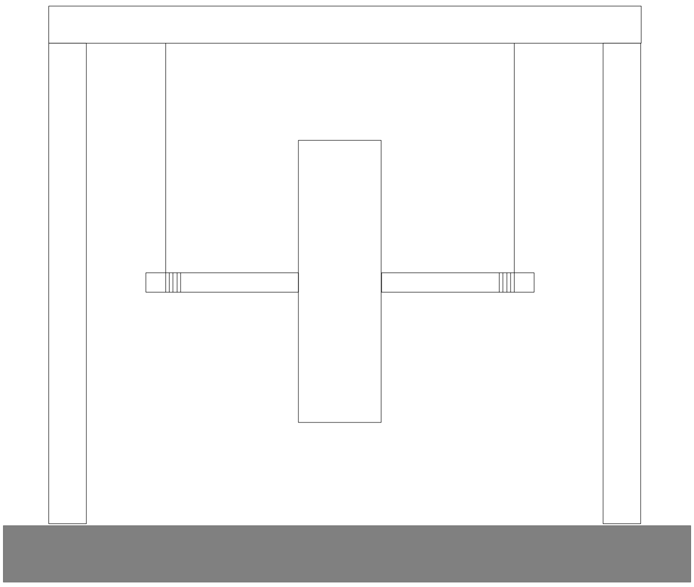

Abb.1:
Maxwellrad wickelt sich an zwei Fäden ab

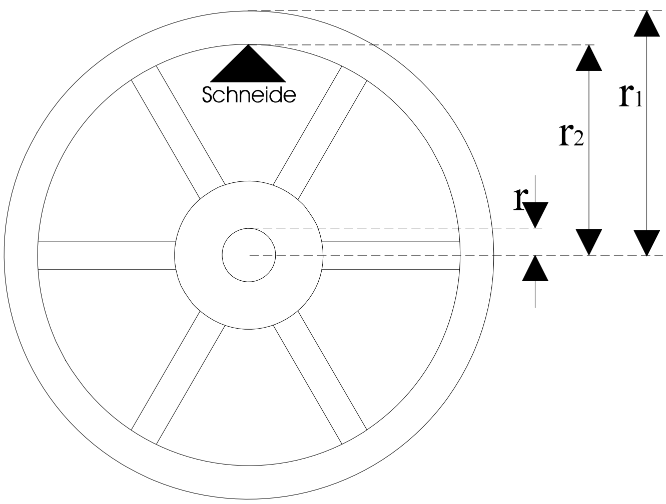

Abb.2:
Maxwellrad schwingt über Schneide

dieses um eine Achse als physikalisches Pendel schwingen zu lassen und aus der gemessenen Schwingungsdauer zunächst das Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse zu berechnen (siehe Abb.2).

Die zur Lösung der Aufgaben notwendigen Grundlagen sollten aus der Vorlesung hinreichend bekannt sein, doch seien sie im folgenden nochmals kurz zusammen-gestellt.

1.2 Translations- und Rotationsbewegung

1.2.1 Translationsbewegung

Durch eine Kraft $(\vec{\mathbf{F}})$ erfährt ein frei beweglicher Körper (mit der Masse **m**) eine Beschleunigung $(\vec{\mathbf{a}})$. Den Zusammenhang gibt das Newtonsche Grundgesetz:

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{m} \bullet \vec{\mathbf{a}} \tag{1}$$

Ist die Kraft und damit die Beschleunigung konstant, dann gelten zwischen der Beschleunigung, der Geschwindigkeit $\vec{\mathbf{v}}$, dem Weg $\vec{\mathbf{s}}$ und der Zeit **t** folgende Gesetze:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{a}} \bullet \mathbf{t} + \vec{\mathbf{v}}_0 \tag{2}$$

$$\vec{\mathbf{s}} = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{\mathbf{2}} \bullet \mathbf{t}^2 + \vec{\mathbf{v}}_0 \bullet \mathbf{t} + \vec{\mathbf{s}}_0 \tag{3}$$

Dabei ist $\vec{\mathbf{v}}_0$ die Geschwindigkeit und $\vec{\mathbf{s}}_0$ der Weg zur Zeit **t** = 0.

Hat der Körper die Geschwindigkeit **v**, so ist seine kinetische Energie (hier speziell Translationsenergie)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{tr}} = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}} \bullet \mathbf{v}^2 \tag{4}$$

1.2.2 Rotationsbewegung

Ein Körper mit der Masse m drehe sich um eine feste Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Um seine kinetische Energie (hier speziell Rotationsenergie) $\mathbf{E_{rot}}$ zu bestimmen, muß berücksichtigt werden, daß die Massenelemente verschiedene Geschwindigkeit besitzen. Die Aufsummation (Integration) über die Translationsenergie hinreichend kleiner Massenelemente ergibt für die Rotationsenergie des Körpers:

$$\mathbf{E_{rot} = \frac{\omega^2}{2} \bullet \int_K r^2 \bullet dm} \qquad (5)$$

Das über alle Massenelemente dm des Körpers erstreckte Integral

$$\mathbf{J = \int_K r^2 \bullet dm} \qquad (6)$$

wird das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der vorgegebenen Drehachse genannt (**r** = Abstand der Massenelemente von der Drehachse).
Aus Gleichung (6) berechnet sich z. B. das Trägheitsmoment einer homogenen Kreisscheibe mit Radius r und Masse m bezüglich ihrer Figurenachse zu

$$\mathbf{J_S = \frac{1}{2} \bullet m \bullet r^2} \qquad (7)$$

Steinerscher Satz:

Ist m die Masse eines Körpers, b der Abstand einer Achse von der zu ihr parallelen Schwerpunktsachse (mit Trägheitsmoment $\mathbf{J_s}$), so ist das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich jener Achse:

$$\mathbf{J = J_S + m \bullet b^2} \qquad (8)$$

(Steinerscher Satz; siehe Manuskript oder Lehrbuch).
Ist also das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Schwerpunktsachse bekannt, so kann man nach dieser Gleichung sein Trägheitsmoment bezüglich jeder anderen zu dieser Schwerpunktsachse parallelen Achse berechnen.

Dynamisches Grundgesetz der Rotation, Bewegungsgesetze

Wirkt auf einen Körper ein Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{9}$$

(Vektorprodukt aus Kraft $\vec{F}$ und Radiusvektor $\vec{r}$, dem Vektor vom Drehpunkt zum Angriffspunkt der Kraft), so erfährt er eine Winkelbeschleunigung α . Den Zusammenhang gibt das dynamische Grundgesetz der Rotation:

$$\vec{M} = J \bullet \vec{\alpha} \tag{10}$$

Ist das Drehmoment konstant, so gelten zwischen α , Winkelgeschwindigkeit ω , Drehwinkel φ und der Zeit **t** die zu den Gleichungen (2) und (3) ganz analogen Gesetze:

$$\omega = \alpha \bullet t + \omega_0 \tag{11}$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} \bullet t^2 + \omega_0 \bullet t + \varphi_0 \tag{12}$$

Dabei sind ω_0 die Winkelgeschwindigkeit φ_0 der Drehwinkel zur Zeit **t** = 0.

1.2.3 Anwendung auf das Maxwellrad

Die allgemeine Bewegung eines Körpers setzt sich zusammen aus einer Translationsbewegung und einer Rotationsbewegung:

Translationsbewegung:

> Der Massenmittelpunkt des Körpers führt eine Translation aus, wobei sich seine Beschleunigung $\vec{a}$ nach Gleichung (1) ergibt, als würde die resultierende Kraft am Massenmittelpunkt angreifen und die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre.

Rotationsbewegung:

> Zusätzlich führt der Körper um den Massenmittelpunkt eine Rotationsbewegung aus, wobei die Winkelbeschleunigung nach Gleichung (10) bestimmt ist.

Die resultierende Bewegung ist im allgemeinen kompliziert, z. B. bei freien Achsen. Bei unserem Problem, dem Maxwellrad, wird sie dadurch vereinfacht, daß die Drehung um eine Achse erfolgt und zwischen der Geschwindigkeit v des Schwerpunkts und der Winkelgeschwindigkeit ω die Zwangsbedingung

$$\mathbf{v = r \cdot \omega} \tag{13}$$

besteht.
Als Ausgangspunkt für die Berechnung kann der Energiesatz der Mechanik herangezogen werden. Fällt das Maxwellrad aus der Ruhe um die Höhe **h** , so ergibt dieser

$$\frac{J}{2} \cdot \omega^2 + \frac{m}{2} \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \tag{14}$$

mit : **v** Geschwindigkeit,
ω Winkelgeschwindigkeit nach Durchlaufen der Höhe **h** ,
g Erdbeschleunigung.

Mit den Gleichungen (2) und (3) folgt hieraus

$$J = m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g}{a} - 1\right) \quad \text{mit } a = \frac{2 \cdot h}{t^2} \tag{15}$$

Auf dasselbe Ergebnis kommt man mit den Gleichungen (1) und (10). Auf das Maxwellrad wirken zwei Kräfte, die Gewichts- und die Seilkraft (siehe Abb. 3).
Daraus ergibt sich: $\mathbf{m \cdot a = m \cdot g} - \mathbf{F_{Seil}}$
Bewegung des Massenmittelpunkts:

$$m \cdot a = m \cdot g - F_{Seil} \tag{16}$$

Rotation um Schwerpunktsachse:

$$J \cdot \alpha = r \cdot F_{Seil} \tag{17}$$

Die Elimination von $\mathbf{F_{Seil}}$ aus diesen beiden Beziehungen liefert mit Gleichung (13)
(danach ist auch **a = r** α) unmittelbar das Ergebnis nach Gleichung (15).

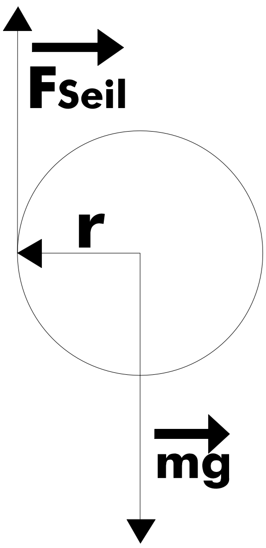

Abbildung 3

1.3 Physikalisches Pendel

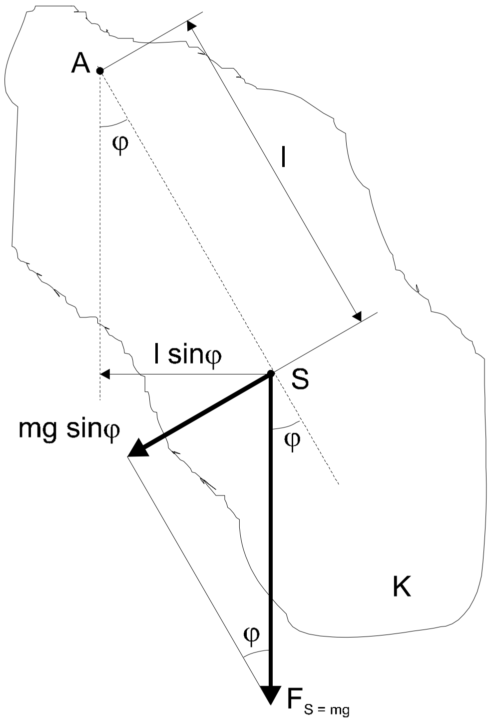

Abbildung 4

Ein Körper sei um eine Achse **A** drehbar (nicht Schwerpunktachse). Der Abstand von **A** bis zum Schwerpunkt **S** sei **l** . Wird der Körper um einen Winkel φ aus seiner Ruhelage ausgelenkt, so wirkt ein rücktreibendes Drehmoment

$$\mathbf{M = - l \cdot m \cdot g \cdot \sin\varphi} \qquad (18)$$

(siehe Abb. 4). Nach Gleichung (10) ergibt sich dann die Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{- l \cdot m \cdot g \cdot \sin\varphi = J_A \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}}$$

bzw.:

$$\mathbf{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{l \cdot m \cdot g}{J_A} \cdot \sin\varphi = 0} \qquad (19)$$

Die Lösung dieser nichtlinearen Differentialgleichung ergibt unharmonische Schwingungen. Für genügend kleine Auslenkungen φ kann

$$\mathbf{\sin\varphi \approx \varphi} \qquad (20)$$

gesetzt werden. Die Lösung der so linearisierten Differentialgleichung ist

$$\mathbf{\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + \beta_0)} \qquad (21)$$

mit

$$\mathbf{\omega = \sqrt{\frac{l \cdot m \cdot g}{J_A}} \qquad bzw. \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{l \cdot m \cdot g}}} \qquad (22)$$

T ist dabei die Schwingungsdauer, φ_0 und β_0 Integrationskonstanten. Ist **J** das Trägheitsmoment um die zur Drehachse parallele Schwerpunktsachse, so ergibt der Steinersche Satz (Gl. (8))

$$\mathbf{J = J_A - m \cdot l^2} \tag{23}$$

Aus Gleichung (22) und Gleichung (23) folgt

$$\mathbf{J = \frac{T^2 \cdot l \cdot m \cdot g}{4 \cdot \pi^2} - m \cdot l^2} \tag{24}$$

Durch Messung der Schwingungsdauer kann damit das gesuchte Trägheitsmoment **J** bestimmt werden.

2. Versuchsdurchführung

2.1 Maxwellrad rollt an zwei Fäden ab

2.1.1 Maxwellrad an zwei gleich langen, dünnen Fäden, die in Richtung der Aufhängevorrichtung etwas zusammenlaufen, mit waagrechter Achse aufhängen. Rad drehen (Fäden wickeln sich auf der Achse auf), bis es auf die Höhe **h** angehoben ist.

2.1.2 Messung: das Rad wird freigegeben und die Zeit **t** gestoppt, die es zum Durchlaufen der Höhe h benötigt.
Es sind mindestens **10** Einzelmessungen durchzuführen.

2.1.3 Trägheitsmoment nach Gleichung (15) berechnen.

2.1.4 Inwieweit spielt die Dicke des Fadens eine Rolle?
Korrigieren Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

2.1.5 Unter der Annahme, dass **m** , **r** , **t** und **h** fehlerbehaftet sind, ergibt sich ein maximaler relativer Fehler

$$\mathbf{\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot h}{g \cdot t^2}} \cdot \left(\frac{\Delta h}{h} + 2 \cdot \frac{\Delta t}{t}\right)} \tag{25}$$

Berechnen Sie diesen und diskutieren Sie das Ergebnis.

2.2 Rad schwingt über Schneide

2.2.1 Rad über Schneide schwingen lassen. Schwingungsdauer aus 50 Schwingungen bestimmen.
Versuch wiederholen.

2.2.2 Berechnung des Trägheitsmoments nach Gleichung (24).
(Nach Abb. 2 ist $\mathbf{l = r_2}$)

2.2.3 Unter der Annahme, dass **T**, **l** und **m** mit Fehlern behaftet sind, ergibt sich ein maximaler relativer Fehler

$$\frac{\Delta J}{J} = \frac{\Delta m}{m} + \left|\frac{1-2\cdot u}{1-u}\right| \cdot \left|\frac{\Delta l}{l}\right| + \left|\frac{2}{1-u}\right| \cdot \left|\frac{\Delta T}{T}\right| \quad \text{mit} \quad u = \frac{4\cdot\pi^2\cdot l}{g\cdot T^2} \tag{26}$$

Berechnen Sie diesen und diskutieren Sie das Ergebnis.

2.3 Faustformel

2.3.1 Für die Berechnung des Trägheitsmoments kann die Faustformel

$$J = k\cdot m\cdot\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} \tag{27}$$

herangezogen werden. Für **k = 1** ergibt sich das Trägheitsmoment eines entsprechenden dickwandigen Hohlzylinders. Durch **k < 1** wird berücksichtigt, dass ein Teil der Masse des Rades in den Speichen liegt.

2.3.2 Bestimmen Sie den Faktor **k** für das Maxwellrad (gemessenes Trägheitsmoment zugrunde legen).

2.3.3 Berechnen Sie den maximalen relativen Fehler von **k** , wenn **m** , $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ und **J** fehlerbehaftet sind.

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\cdot r_1\cdot\Delta r_1 + 2\cdot r_2\cdot\Delta r_2}{r_1^2 + r_2^2} \tag{28}$$

2.4 Vergleich der Methoden

2.4.1 Vergleichen Sie die maximalen relativen Fehler nach 2.1.5 und 2.2.3.

2.4.2 Welche Fehlerursachen - außer den in der Fehlerrechnung schon berücksichtigten - treten auf ? Notieren Sie diese.

2.4.3 Welche der beiden Meßmethoden ist die genauere? Erläutern Sie weshalb.

3. Fragen zu Versuch und Stoffgebiet

3.1 Bei der Translationsbewegung ist die Masse ein Maß für die Trägheit des Körpers. Gilt dies auch für die Rotationsbewegung?

3.2 Zählen Sie einige Beispiele aus Alltag und Technik auf, bei denen das Trägheitsmoment eines Körpers Bedeutung hat.

3.3 Was sagt der Satz von Steiner aus? Wie kann er hergeleitet werden?

3.4 Energiesatz der Mechanik: Unter welchen Voraussetzungen gilt er? Was ist also in Gleichung (14) vernachlässigt?

3.5 Zeigen Sie, daß Gleichung (15) aus den Gleichungen (13) und (14) folgt.

3.6 Gleichung (17): Warum hat hier nur die Seilkraft ein Drehmoment und nicht auch die Gewichtskraft?

3.7 Erklären Sie die Begriffe mathematisches und physikalisches Pendel.

3.8 Wie würden Sie den auf Seite 6 stehenden Satz "...für genügend kleine Auslenkungen kann $\sin\varphi \approx \varphi$ gesetzt werden" genauer erläutern?

3.9 Leiten Sie die Formeln für den maximalen relativen Fehler von **J** nach Gleichung (25) und (26) her.

3.10 Wie wird in Gleichung (25) die Größe Δt bestimmt?